

# Invariantes de nudos

Aprendiz:

Yeimi Alejandra Sánchez Bautista

Mentores:

Anderson Arley Vera Arboleda

Eric Rubiel Dolores Cuenca

Diciembre 2023

## 1. Introducción

[1] La primera aparición de nudos en un contexto matemático fue en un artículo de Vandermonde en 1771, seguido de algunas notas sobre nudos de Gauss en 1794 que principalmente se componían de dibujos. 50 años más tarde, los primeros intentos sistemáticos de estudiar y clasificar nudos se deben principalmente a Tait, Kirkman, y Little, sus estudios se vieron frustrados e interrumpidos por la ausencia de un marco matemático adecuado que los sustentara. Estos primeros estudios de nudos a menudo pudieron demostrar que dos nudos eran equivalentes, pero no se avanzó mucho en poder demostrar cuando eran diferentes.

Con la introducción de de la topología algebraica a principios del siglo XX, matemáticos como Dehn, Seifert, Reidemeister, Alexander, y Wirtinger se sintieron atraídos por el tema. Se descubrieron conexiones entre nudos y la topología de 3-variedades

## 2. Definiciones

**Definición 1:** Un nudo es un encaje (lineal por partes) de la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^3$

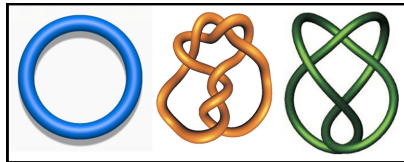


Figura 1: Ejemplos de nudos: <https://www.gaussianos.com/que-es-un-nudo-para-una-matematica/>

**Definición 2:** Un enlace es un encaje disjunto de  $n$ -copias de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Cada copia de  $\mathbb{S}^1$  en el enlace se denomina componente del enlace. Es decir un enlace es la colección de nudos que no se cruzan, pero pueden estar enlazados (o anudados) entre sí.

Notemos que un nudo se puede describir como un enlace de una componente.

**Definición 3:** Se dice que dos nudos (o enlaces)  $k$  y  $k'$  son isotópicos (ambientales) si existe una familia de homeomorfismos  $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, t \in [0, 1]$ , tal que  $h_1(k) = k', h_0 = id$  y  $(x, t) \mapsto (h_1(x), t)$  define un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$  a sí mismo.

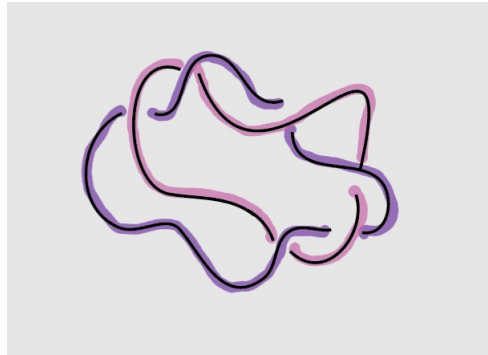


Figura 2: Ejemplo de enlace con 2 componentes

Es decir, podemos pasar de un nudo a otro a través de una serie de pasos intermedios, por medio de una deformación continua del espacio

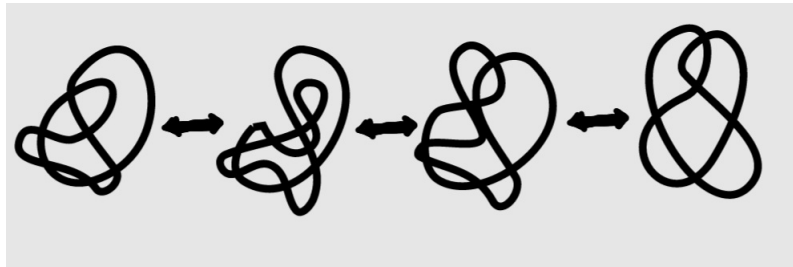


Figura 3: Ejemplo de como podemos pasar de un nudo a otro

Observemos que la condición isotópico ambiental es más fuerte que la condición de equivalencia homotópica y por lo tanto de homeomorfismo (todos los nudos son homeomorfos a la circunferencia unitaria). Ejemplo: Un punto es homotópicamente equivalente a un punto, pero estos no son homeomorfos

La isotopía ambiental nos garantiza pasar de un nudo (o enlace) a otro sin perder la estructura de estos (sin romper ni cortar) más aún conservando la estructura del espacio.

**Definición 4:** Diremos que dos nudos son equivalentes o iguales si son isotópicos.

Observación: En lugar de trabajar con nudos y enlaces en el espacio tridimensional, podemos trabajar con ellos en el plano.

**Definición 5:** Una proyección  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de un nudo  $k$  es regular si:

- Todos los puntos múltiples de la proyección son puntos dobles.
- Solo hay un número finito de puntos dobles.
- Ningún punto doble contiene la imagen de un vértice.

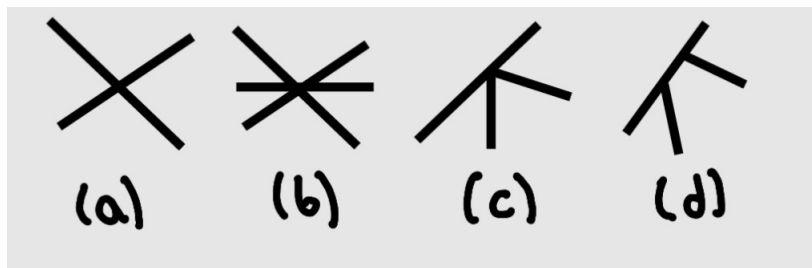


Figura 4: (a) es proyección regular, mientras que (b), (c) y (d) no lo son

Todo nudo admite una proyección regular.

**Definición 6:** El diagrama de un nudo es la imagen de una proyección regular de un nudo al que se le ha asignado una

estructura de cruce inferior o superior. La estructura del cruce se indica mediante saltos de línea en el diagrama



Figura 5: Ejemplos de nudos con sus respectivos diagramas: Jackson, D.M. y Moffatt, I. (2019). An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants. (1a ed.). Springer International Publishing. Fig. 1.3

## 2.1. Movimientos de Reidemeister

Muchos diagramas diferentes surgen de nudos equivalentes. Por tanto para estudiar los nudos a través de sus diagramas es necesario comprender como se relacionan entre sí los diagramas correspondientes a nudos equivalentes.

**Definición 7:** Decimos que dos diagramas de nudos están relacionados por isotopía plana si están relacionados por una secuencia finita de movimientos.

**Definición 8 (Movimientos de Reidemeister):** Los movimientos de Reidemeister consisten en isotopía plana y los siguientes tres cambios locales en un diagrama.

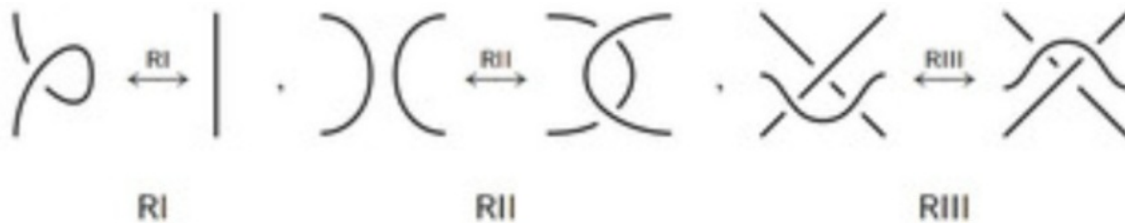


Figura 6: Movimientos de Reidemeister: Jackson, D.M. y Moffatt, I. (2019). An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants. (1a ed.). Springer International Publishing. Pág. 13

**Teorema:** Dos nudos son equivalentes si sus diagramas están relacionados por una secuencia finita de movimientos de Reidemeister. Esto es:

$$\frac{\text{enlaces}}{\text{isotopía}} \simeq \frac{\text{diagramas}}{\text{Movimientos de Reidemeister}}$$

## 3. Invariantes de nudos y enlaces

Un problema fundamental de la teoría de nudos es determinar si dos nudos son equivalentes o no. Este es en general un problema difícil. Los diagramas para el mismo nudo pueden verse notablemente diferentes. Por ejemplo, para determinar si dos nudos son equivalentes podríamos intentar una secuencia de movimientos de Reidemeister para transformar uno en el otro y si fallamos no tenemos garantizado de que no sean equivalentes. Requerimos herramientas más sofisticadas para decir si dos nudos o enlaces son equivalentes.

**Definición 9 (Invariante de nudo):** Un invariante de nudo (o enlace) es una función  $f$  en el conjunto de clases de isotopías de enlaces.

Es decir:  $\frac{\text{enlaces}}{\text{isotopía}} \rightarrow S$  donde  $S$  es un conjunto.

El codominio  $S$  de un invariante de nudo generalmente se selecciona para que el problema de probar la equivalencia de dos de sus elementos sea más fácil que probar la equivalencia de dos enlaces (probar si pertenecen a la misma clase de isotopía)

Un invariante de enlace tiene la propiedad de que si dos enlaces  $L$  y  $L'$  son equivalentes, entonces  $f(L) = f(L')$ . De manera contrapositiva: Si  $f$  es una invariante de enlace y  $L$  y  $L'$  son enlaces  $f(L) \neq f(L') \Rightarrow L \neq L'$

### 3.1. Constancia en la clases de isotopía

Un enfoque para definir invariantes de nudos es definirlos como constantes (no cambian) sobre clases de isotopías de nudos, ya que tales funciones son por definición invariantes de nudos.

**Definición 10 (Número de cruces):** Es el mínimo del número de cruces en un diagrama del nudo (o enlace) sobre todos sus diagramas.

Observación: Un nudo con uno o dos cruces siempre es trivial, ya que con movimientos de Reidemeister siempre podemos llegar de uno a otro.

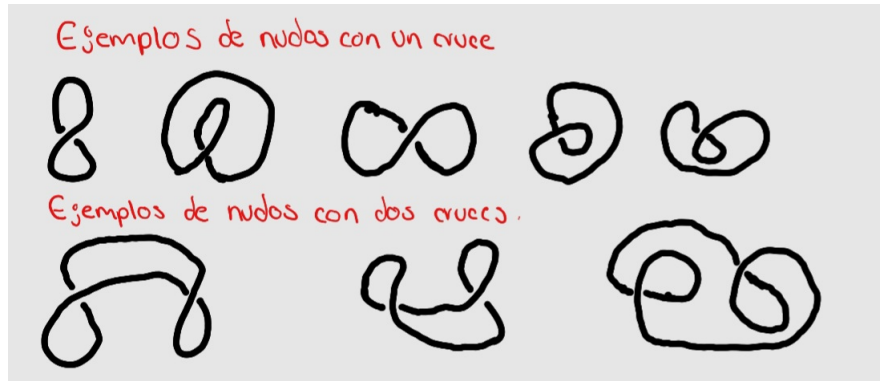


Figura 7: Ejemplos de nudos con uno o dos cruces

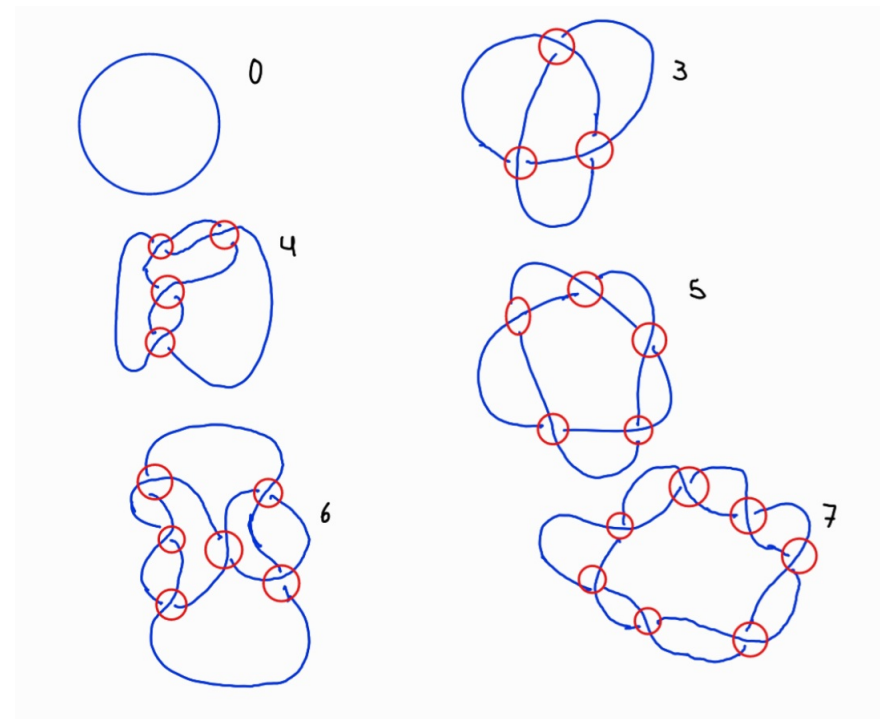


Figura 8: Ejemplo del número de cruces de algunos nudos

Es claro que para el nudo uno su número de cruce es cero, para el siguiente nudo en efecto el número de cruces es tres, ya que no puede ser 0, 1, ni 2 porque si lo fuera tendríamos que es equivalente al trivial lo cual no ocurre.

Notemos que cuando el número de cruces es mayor las cosas se complican porque hay que demostrar que nuestro nudo (o enlace) no es equivalente a otro con un número de cruces menor.

### 3.2. Invariancia bajo movimientos de Reidemeister

Otro enfoque para definir un invariante de enlace es definir una función en un diagrama de enlaces y mostrar que el valor de la función es invariante bajo los movimientos de Reidemeister. A menudo los invariantes definidos de esta manera son más fáciles de calcular y suelen ser muy poderosas (distinguen entre muchos enlaces)

**Definición 11 (tricoloreabilidad):** Un nudo (o enlace) es tricoloreable si cada arco de diagrama correspondiente al nudo (o enlace) se puede colorear de uno o tres colores, de acuerdo a la siguiente regla:

En cada cruce, los tres arcos incidentes son del mismo color o todos son de distinto color (es decir en cada cruce hay un solo color o los tres colores).

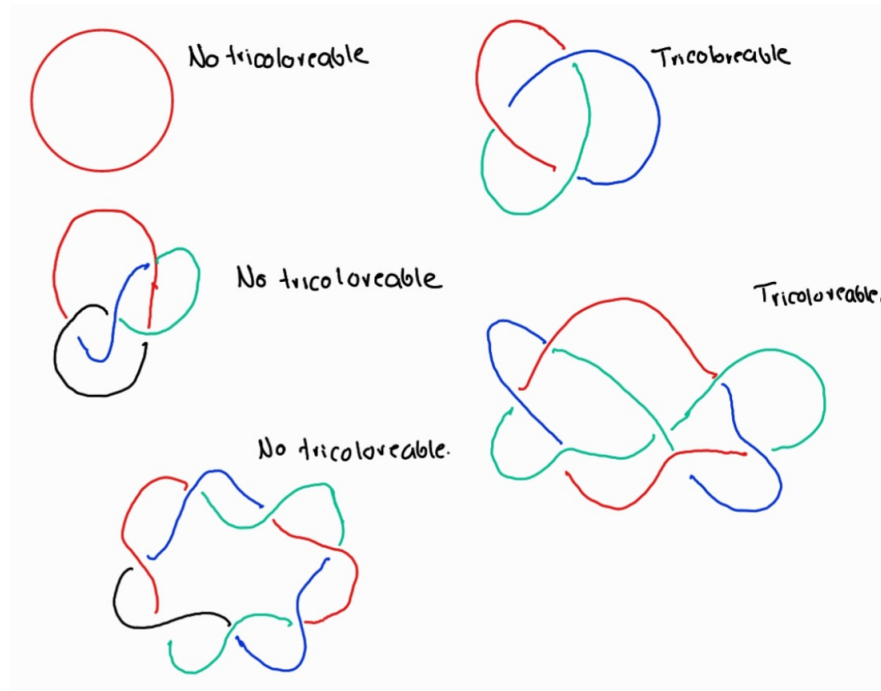


Figura 9: Ejemplo de nudos tricoloreables y no tricoloreables

En nuestra figura, el primer nudo que tenemos (nudo trivial) no es tricoloreable porque no tiene cruces por tanto no cumple la regla, los otros dos nudos no son tricoloreables porque al pintar uno de nuestros arcos de un color solo pueden ocurrir dos cosas, o todos los demás son del mismo color, con lo cual no se utilizarían al menos dos colores o los colores de los demás arcos quedan determinados y al llegar de nuevo al arco con el que iniciamos tendremos que habrá por lo menos un cruce con dos colores y no importa que color se elija para ese arco se obtendrá siempre lo mismo.

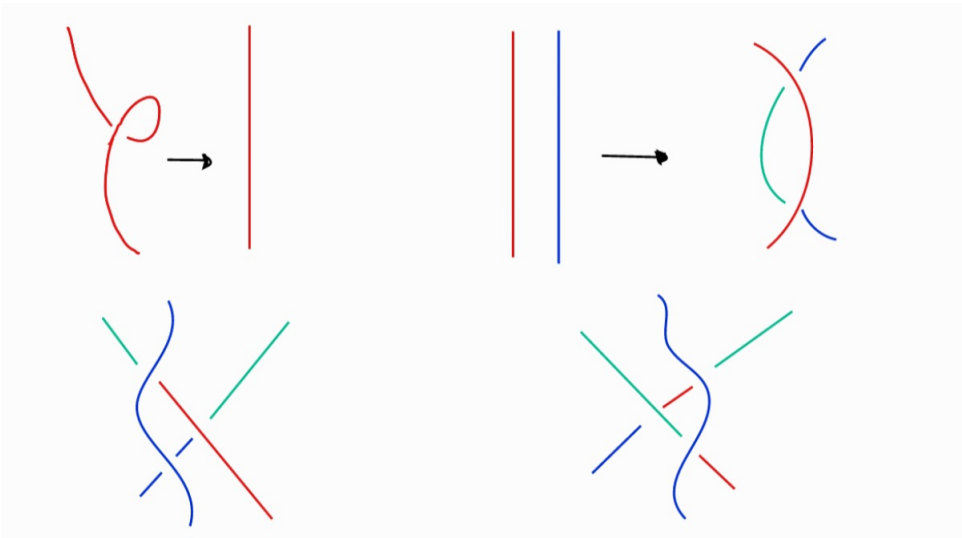


Figura 10: Invariante bajo los movimientos de Reidemeister

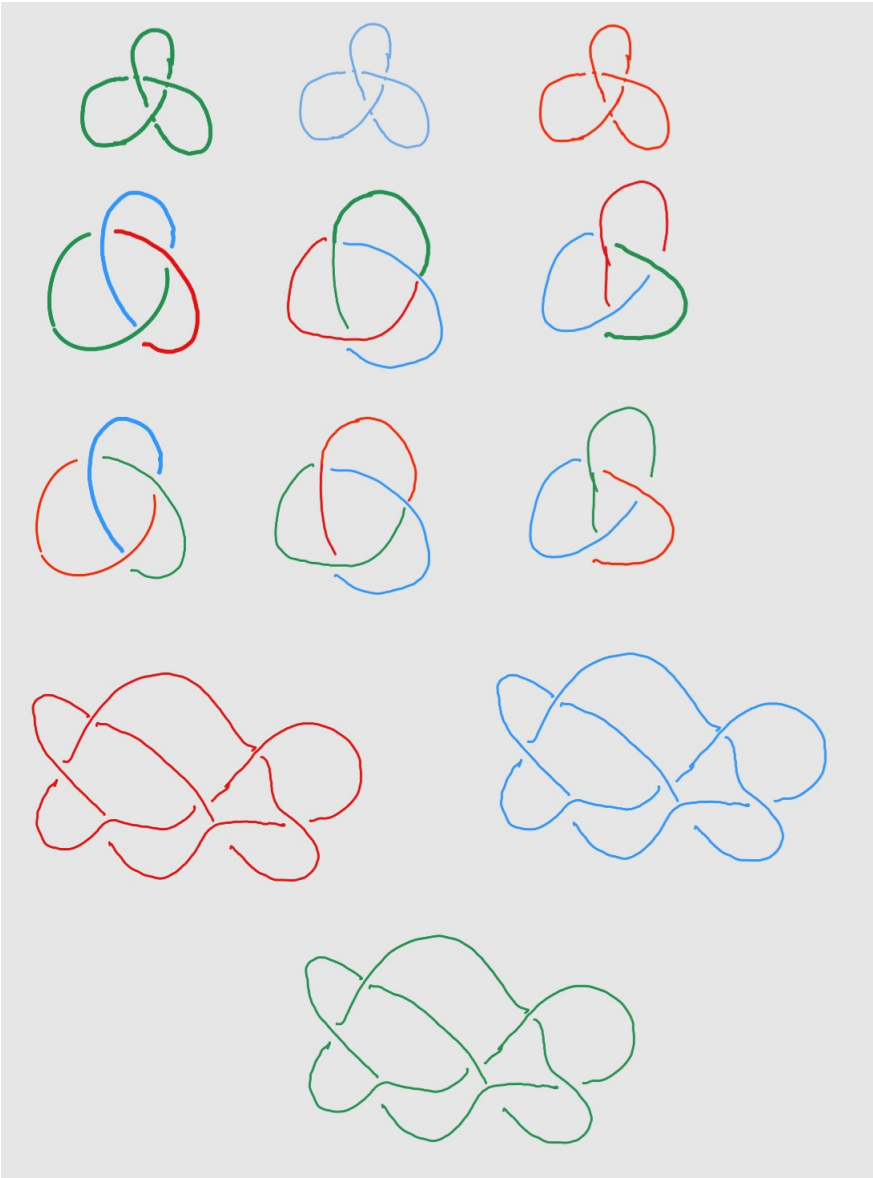


Figura 11: Tricoloreamientos de dos nudos

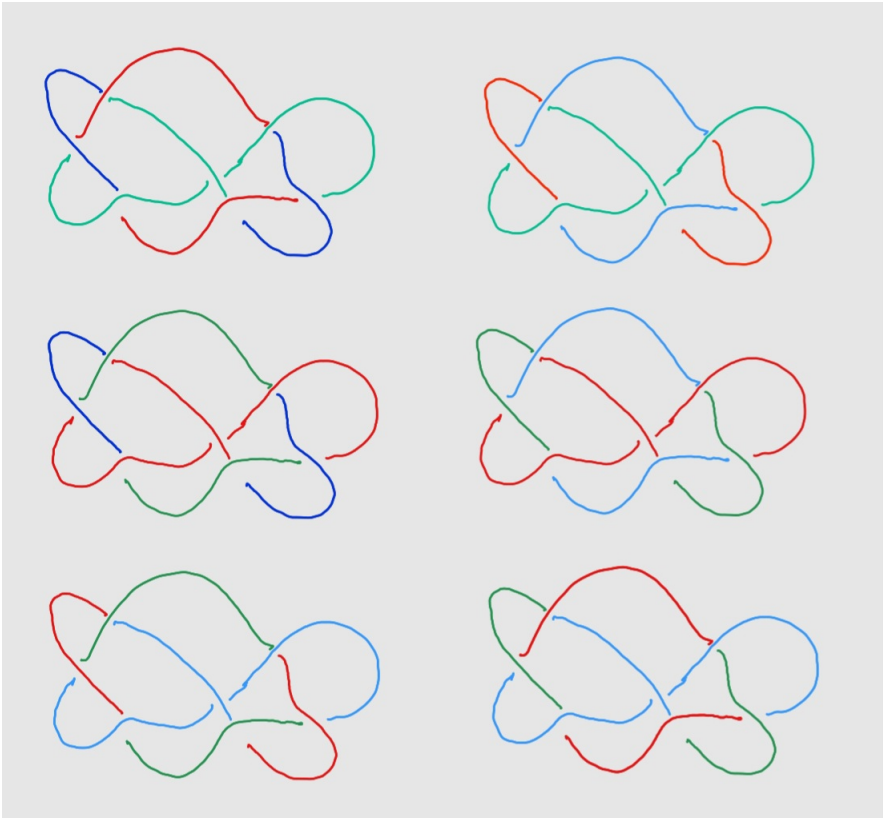


Figura 12: Tricoloreamientos de dos nudos



### 3.3. Invariantes polinomiales

El polinomio que consideraremos es el polinomio de Jones, cuya introducción inició una revolución en la teoría de nudos.

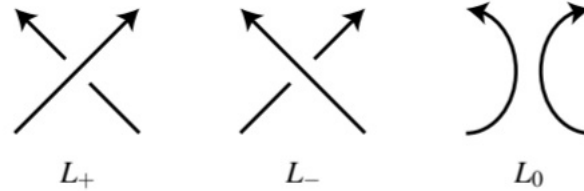


Figura 13: definición de  $L_+$ ,  $L_-$  y  $L_0$ : Jackson, D.M. y Moffatt, I. (2019). An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants. (1a ed.). Springer International Publishing. Fig. 2.5

**Definición 12 (Polinomio de Jones):** El polinomio de Jones  $J(L)$ , de un enlace  $L$  es un invariante isotópico de enlaces definidos por las relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{SJ1} : t^{-1}J(L_+) - tJ(L_-) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})J(L_0), \\ \mathbf{SJ2} : J(\mathcal{O}) &= 1, \end{aligned}$$

Figura 14: Jackson, D.M. y Moffatt, I. (2019). An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants. (1a ed.). Springer International Publishing. Pág. 31

**Polinomio de Jones**

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle &= A \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle \\
 &= A \left( A \left\langle \text{Diagram 4} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 5} \right\rangle \right) \\
 &\quad + A^{-1} \left( A \left\langle \text{Diagram 6} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 7} \right\rangle \right) \\
 &= A^2 \left\langle \text{Diagram 8} \right\rangle + 1 \left\langle \text{Diagram 9} \right\rangle \\
 &\quad + 1 \left\langle \text{Diagram 10} \right\rangle + A^{-2} \left\langle \text{Diagram 11} \right\rangle \\
 &= (-A^2 - A^{-2}) \left( A^2 \left\langle \text{Diagram 12} \right\rangle \right) + \left\langle \text{Diagram 13} \right\rangle + \\
 &\quad \left\langle \text{Diagram 14} \right\rangle + A^{-2} \left\langle \text{Diagram 15} \right\rangle \\
 &= (-A^{-4} - 1) \left( A \left\langle \text{Diagram 16} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 17} \right\rangle \right) \\
 &\quad + \left( A \left\langle \text{Diagram 18} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 19} \right\rangle \right) + \\
 &\quad \left( A \left\langle \text{Diagram 20} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 21} \right\rangle \right) + A^{-2} \left( A \left\langle \text{Diagram 22} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 23} \right\rangle \right)
 \end{aligned}$$

$L_1 = -(A^{-2} + A^2) \quad L_2 = 1$

Figura 15: Ejemplo del cálculo del polinomio de Jones de un nudo

$$\begin{aligned}
&= (-A^{-4} - 1)(A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) + (A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) \\
&\quad + (A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) + A^{-2}(A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) \\
&= ((-A^{-4} - 1)(-A^{-1} - A^3 + A^{-1}) + (-A^{-1} - A^3 + A^{-1})) \\
&\quad + (-A^{-1} - A^3 + A^{-1}) + A^{-2}(-A^{-1} - A^3 + A^{-1}) \\
&= \cancel{A^{-5} + A^{-1} - A^{-5} + A^{-1} + A^3 - A^{-1} - A^{-1} - A^3 + A^{-1} - A^{-1} - A^3 + A^{-1}} \\
&\quad - \cancel{A^{-3} - A + A^{-3}} \\
&= -A^3 + A^{-1} - A = -A(A^2 - A^{-2} + 1)
\end{aligned}$$

Figura 16: Ejemplo del cálculo del polinomio de Jones de un nudo

## Referencias

- [1] Jackson, D.M. y Moffatt, I. (2019). An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants. (1a ed.). Springer International Publishing. Pág. XVII
- [2] Jackson D.M. y Moffatt, I. (2019). An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants. (1a ed.). Springer International Publishing.